一维随机 Landau-Lifshitz-Bloch 方程的平均化原理

尹修伟 [1]， 申广君 [1]， 吴奖伦 [2]

(1. 安徽师范大学统计系, 安徽 芜湖 241000;

2. 斯旺西大学数学系, 英国 斯旺西 SA1 8EN)

摘要： 平均化原理是研究非线性动力系统定性行为的有效方法. 主要研究一维随机 Landau-Lifshitz-Bloch 方程 (SLLBE) 的平均化原理, 在一些假设条件下, 通过利用 Khasminskii 时间离散化方法, 证明了在均方意义下, 随机 Landau-Lifshitz-Bloch 方程的解收敛到平均化随机系统的解.

关键词： 随机 Landau-Lifshitz-Bloch 方程; 平均化原理; 强收敛

中图分类号： O211　　**文献标识码：** A

文章编号： 1008-5513(2022)03-0380-12

DOI： 10.3969/j.issn.1008-5513.2022.03.007

1 引言

物质的磁化是物理学中的一个重要现象. 当温度低于临界温度时, 物质将会发生磁化现象, 可以用 Landau-Lifshitz-Gilbert 方程来描述这种磁化现象, 参见文献 [1]. 但是对于较高的温度来说, 必须用一个更合适的模型例如 Landau-Lifshitz-Bloch 方程来替代 [2-3]. Landau-Lifshitz-Bloch 方程的一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma u \times H_e + \frac{L_1}{|u|^2}(u \cdot H_e)u - \frac{L_2}{|u|^2} u \times (u \times H_e),\ t > 0, \tag{1}$$

其中 $u = u(t) = u(t,x) \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, 且 $|\cdot|$ 与 $\times$ 分别表示 $\mathbb{R}^3$ 中的欧几里得范数和向量的叉积. 此外,

$$H_e = \Delta u - \frac{1}{\xi}\Big(1 + \frac{3}{5}\frac{T}{T - T_c}|u|^2\Big)u$$

表示有效磁场, 其中 ξ 为纵向磁化率. 本文只考虑 $T > T_c$ 和 $L_1 = L_2 =: \nu_1$ 的情形. 利用恒等式 $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$ 可以将方程 (1) 改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu_1 \Delta u + \gamma u \times \Delta u - \nu_2(1 + \mu|u|^2)u, \tag{2}$$

收稿日期： 2022-06-10.　　**接收日期：** 2022-08-12.

基金项目： 国家自然科学基金 (11901005, 12071003); 安徽省自然科学基金 (2008085QA20).

作者简介： 尹修伟 (1990-), 博士, 副教授, 研究方向：随机分析.

通讯作者： 吴奖伦 (1963-), 博士, 教授, 研究方向：随机偏微分方程.

其中 $\nu_2=\frac{\nu_1}{\xi}$, $\mu=\frac{3}{5}\frac{T}{T-T_c}$. 文献 [4] 得到了方程 (2) 弱解的存在性和正则性. 然而方程 (1) 不足以捕捉到高温下单个轨迹的分散性, 文献 [5-6] 通过用 H_e+ "噪声" 替代 H_e 得到了方程 (1) 的随机版本. 最近, Jiang et al. [7] 建立了 SLLBE 鞅解的存在唯一性, Brzézniak et al. [8] 研究了 SLLBE 的轨道解和不变测度, Qiu at al. [9] 建立了一维 SLLBE 的大偏差原理和中心极限定理.

本文主要考虑一维随机 Landau-Lifshitz-Bloch 方程的平均化原理, 即研究下述随机系统当 $\varepsilon\to 0$ 时的渐近行为:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u^\varepsilon(t)=\nu_1\Delta u^\varepsilon(t)\mathrm{d}t+\gamma u^\varepsilon(t)\times\Delta u^\varepsilon(t)\mathrm{d}t+f\big(\frac{t}{\varepsilon},u^\varepsilon(t)\big)\mathrm{d}t\\ \qquad\qquad -\nu_2(1+\mu|u^\varepsilon(t)|^2)u^\varepsilon(t)\mathrm{d}t+u^\varepsilon(t)\times G\mathrm{d}W(t),\ 0<t<T,\ x\in\mathcal{D},\\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\vec{n}}|_{\partial\mathcal{D}}=0,\\ u^\varepsilon(0)=u_0^\varepsilon, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\vec{n}$ 为边界 $\partial\mathcal{D}$ 的单位外法向量, W 为无穷维的 Wiener 过程, $G\in\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0;H^1)$ 为 Hilbert-Schmidt 算子 (详见第二部分). 由 Krylov 与 Bogolyubov 建立的平均化原理是研究非线性动力系统的有效工具. 与此同时, Khasminskii [10] 建立了随机平均化原理. 随后大量的文献研究了有限维或无穷维随机动力系统的平均化原理, 参见文献 [11-16] 等.

受上述文献启发, 本文的主旨是建立随机系统 (3) 的平均化原理. 本文结构安排如下, 第二部分简要回顾本文需要的一些基本事实, 第三部分叙述并证明本文的主要结论.

2 准备知识

为简单起见, 用 C 表示非负常数, 它在不同位置的取值可以不同, 当强调 C 依赖于参数时, 有时也将依赖性表示出来. 假定 $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ 为具有光滑边界的有界区域. $L^p(\mathcal{D})=L^p(\mathcal{D};\mathbb{R}^3)$, $p\geq 1$ 为向量值的 L^p 空间, 并赋予范数 $\|\cdot\|_{L^p}$. 令 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ 为空间 $L^2(\mathcal{D})$ 的内积. 给定非负整数 $m\geq 0$, 令 H^m 为 $\mathcal{D}$ 通常的 Sobolev 空间, 并赋予范数 $\|u\|_{H^m}^2=\|(I-\Delta)^{\frac{m}{2}}u\|_{L^2}^2$ 和内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^m}$. 约定 $H:=H^0=L^2(\mathcal{D})$.

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$ 为给定的带域流概率空间并且满足通常条件, $\{e_k,k\in\mathbb{N}\}$ 为 H 的标准正交基, 且 Q 为 H 上对称, 正定的迹类算子并且满足 $Qe_k=\mu_k e_k$, $k\in\mathbb{N}$. 设 $W(\cdot)$ 为 H 值的 Q-Wiener 过程, $W(\cdot)$ 可以表示为

$$W(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\mu_k}e_k(x)\beta_k(t),$$

其中 $(\beta_k,k\in\mathbb{N})$ 为一列独立的一维 Wiener 过程. 令 $\mathcal{H}_0=Q^{\frac{1}{2}}H$, 设 X 为可分 Hilbert 空间, 从 $\mathcal{H}_0$ 到 X 的 Hilbert-Schmidt 算子全体记作 $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0;X)$, 并赋予范数 $\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0;X)}^2=\mathrm{Tr}(Q\Phi Q^*)$, 对于任意的 $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0;X)$ 值可料过程 $\Phi(t)$, $0\leq t\leq T$, 且满足 $\mathbb{E}\int_0^T\mathrm{Tr}(\Phi Q\Phi^*)\mathrm{d}t<+\infty$, 随机积分 $\int_0^T\Phi(t)\mathrm{d}W(t)$ 适定. 更多内容可参见文献 [17]. 以下假设 $G\in\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0;H^1)$. 因此对任意的 $u\in H^1$, 有

$$\|u\times G\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0;H^1)}^2\leq C\|u\|_{H^1}^2. \tag{4}$$

本文假定以下条件成立:

(H1) 存在常数 $L, K > 0$, 使得

$$\|f(t,u)-f(t,v)\|_{H^1} \le K\|u-v\|_{H^1},\ \|f(t,0)\|_{H^1} \le L,\quad u,v \in H^1.$$

定理 2.1[9] 对于 $\varepsilon > 0$, 令 $u_0^\varepsilon \in H^1$ 且假设 (H1) 成立. 则对任意的 $T > 0$, 方程 (3) 存在唯一解 $u^\varepsilon \in L^2(\Omega; C([0,T]; H^1)) \cap L^2(\Omega \times [0,T]; H^2)$, 且满足

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t) = u_0^\varepsilon &+ \nu_1 \int_0^t \Delta u^\varepsilon(s)\mathrm{d}s + \gamma \int_0^t u^\varepsilon(s) \times \Delta u^\varepsilon(s)\mathrm{d}s + \int_0^t f\big(\frac{s}{\varepsilon}, u^\varepsilon(s)\big)\mathrm{d}s \\ &- \nu_2 \int_0^t (1+\mu|u^\varepsilon(s)|^2)u^\varepsilon(s)\mathrm{d}s + \int_0^t u^\varepsilon(s) \times G\mathrm{d}W(s),\ \forall\, 0 < t \le T.\ \ \mathbb{P}-\text{a.s.} \end{aligned}$$

命题 2.1[8-9] 设 u^ε 为方程 (3) 的解, 则对任意的 $p \ge 1$, 存在 $C(T, \|u_0^\varepsilon\|) > 0$, 使得

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T} \|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^{2p}\Big) + \mathbb{E}\Big(\int_0^T \|u^\varepsilon(t)\|_{H^2}^2 \mathrm{d}t\Big)^p \le C(T, \|u_0^\varepsilon\|_{H^1}). \tag{5}$$

3 主要结论

这一节主要建立方程 (3) 的平均化原理, 即将证明当 $\varepsilon \to 0$ 时, 方程 (3) 收敛到下述平均化方程.

$$\begin{cases} \mathrm{d}\bar{u}(t) = \nu_1 \Delta \bar{u}(t)\mathrm{d}t + \gamma \bar{u}(t) \times \Delta \bar{u}(t)\mathrm{d}t + \bar{f}\big(\bar{u}(t)\big)\mathrm{d}t \\ \qquad\qquad - \nu_2(1+\mu|\bar{u}(t)|^2)\bar{u}(t)\mathrm{d}t + \bar{u}(t) \times G\mathrm{d}W(t),\ 0 < t < T,\ x \in \mathcal{D}, \\ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \vec{n}}|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \\ \bar{u}(0) = \bar{u}_0, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\bar{f}: H^1 \to H^1$ 满足下列条件:

(H2) 对任意的 $T > 0$, $x \in H^1$, 有

$$\frac{1}{T}\Big\|\int_0^T (f(t,x) - \bar{f}(x))\mathrm{d}t\Big\|_{H^1} \le \kappa(T)(1 + \|x\|_{H^1}),$$

其中 $\kappa: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 为有界函数, 且满足 $\lim\limits_{T\to\infty} \kappa(T) = 0$.

注 3.1 容易验证 $\bar{f}$ 满足假设 (H1). 因此方程 (6) 存在唯一解, 且其解满足命题 2.1.

在叙述本文主要结论之前, 先介绍一个引理. 对任意给定的随机过程 φ, 定义简单随机过程 $\tilde{\varphi}$,

$$\tilde{\varphi}(\sigma) = \varphi(k\delta),\ \forall\, \sigma \in [k\delta, (k+1)\delta),\ k \ge 0.$$

引理 3.1　令假设 (H1) 与 (H2) 成立, u^ε 和 $\bar{u}$ 分别为方程 (3) 和方程 (6) 的解. 则对任意的 $T>0$, 有

$$\mathbb{E}\int_0^T \|u^\varepsilon(t)-\tilde{u}^\varepsilon(t)\|_{H^1}^2 \mathrm{d}t \le C(T,\|u_0^\varepsilon\|_{H^1})\delta^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

$$\mathbb{E}\int_0^T \|\bar{u}(t)-\tilde{\bar{u}}(t)\|_{H^1}^2 \mathrm{d}t \le C(T,\|u_0\|_{H^1})\delta^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

证明　由于 (7) 式与 (8) 式的证明类似, 故只需证明 (7) 式即可. 令 $T(\delta)=\left[\frac{T}{\delta}\right]$, 其中 $[x]$ 为 x 的取整函数. 则

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \|u^\varepsilon(t)-\tilde{u}^\varepsilon(t)\|_{H^1}^2 \mathrm{d}t\\
=&\mathbb{E}\int_0^\delta \|u^\varepsilon(t)-u_0^\varepsilon\|_{H^1}^2 \mathrm{d}t+\mathbb{E}\sum_{k=1}^{T(\delta)-1}\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\|u^\varepsilon(t)-u^\varepsilon(k\delta)\|_{H^1}^2\mathrm{d}t\\
&+\mathbb{E}\int_{T(\delta)\delta}^T \|u^\varepsilon(t)-u^\varepsilon(T(\delta)\delta)\|_{H^1}^2\mathrm{d}t\\
\le& C(T,\|u_0^\varepsilon\|_{H^1})\delta+2\mathbb{E}\sum_{k=1}^{T(\delta)-1}\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\|u^\varepsilon(t)-u^\varepsilon(t-\delta)\|_{H^1}^2\mathrm{d}t\\
&+2\mathbb{E}\sum_{k=1}^{T(\delta)-1}\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\|u^\varepsilon(t-\delta)-u^\varepsilon(k\delta)\|_{H^1}^2\mathrm{d}t\\
=:&\, C(T,\|u_0^\varepsilon\|_{H^1})\delta+2\sum_{k=1}^{T(\delta)-1}\mathrm{I}_k+2\sum_{k=1}^{T(\delta)-1}\mathrm{II}_k.
\end{aligned} \tag{9}$$

给定 $1\le k\le T(\delta)-1$ 与 $k\delta\le t<(k+1)\delta$, 由 Itô 公式得

$$\begin{aligned}
&\|u^\varepsilon(t)-u^\varepsilon(t-\delta)\|_{H^1}^2\\
=&2\int_{t-\delta}^t\langle \nu_1\Delta u^\varepsilon(\tau),u^\varepsilon(\tau)-u^\varepsilon(t-\delta)\rangle_{H^1}\mathrm{d}\tau\\
&+2\int_{t-\delta}^t\langle \gamma u^\varepsilon(\tau)\times\Delta u^\varepsilon(\tau),u^\varepsilon(\tau)-u^\varepsilon(t-\delta)\rangle_{H^1}\mathrm{d}\tau\\
&+2\int_{t-\delta}^t\langle -\nu_2(1+\mu|u^\varepsilon(\tau)|^2)u^\varepsilon(\tau),u^\varepsilon(\tau)-u^\varepsilon(t-\delta)\rangle_{H^1}\mathrm{d}\tau\\
&+2\int_{t-\delta}^t\langle f_\varepsilon(\tau,u^\varepsilon(\tau)),u^\varepsilon(\tau)-u^\varepsilon(t-\delta)\rangle_{H^1}\mathrm{d}\tau+\int_{t-\delta}^t\|u^\varepsilon(\tau)\times G\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0,H^1)}^2\mathrm{d}\tau\\
&+2\int_{t-\delta}^t\langle u^\varepsilon(\tau)-u^\varepsilon(t-\delta),u^\varepsilon(\tau)\times G\mathrm{d}W(\tau)\rangle_{H^1}\\
=:&\,\mathrm{J}_1(t)+\mathrm{J}_2(t)+\mathrm{J}_3(t)+\mathrm{J}_4(t)+\mathrm{J}_5(t)+\mathrm{J}_6(t).
\end{aligned}$$

下面将对以上各式分别进行估计. 对于 $\mathrm{J}_1(t)$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_1(t) &\leq 2\nu_1\int_{t-\delta}^{t}\Big(-\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^2}^2+\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}^2\Big)\mathrm{d}\tau+2\nu_1\int_{t-\delta}^{t}\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^2}\|u^{\varepsilon}(t-\delta)\|_{H^2}\mathrm{d}\tau\\ &\leq \nu_1\int_{t-\delta}^{t}[-\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^2}^2+2\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}^2+\|u^{\varepsilon}(t-\delta)\|_{H^2}^2]\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

对于 $\mathrm{J}_2(t)$ 与 $\mathrm{J}_3(t)$, 利用 Sobolev 嵌入定理得

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_2(t) \leq& 2C\gamma\int_{t-\delta}^{t}\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^2}^2\mathrm{d}\tau\\ &+2C\gamma\int_{t-\delta}^{t}\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^2}\|u^{\varepsilon}(t-\delta)\|_{H^2}\mathrm{d}\tau\\ \leq&\frac{\nu_1}{2}\int_{t-\delta}^{t}\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^2}^2d\tau+2C\gamma\int_{t-\delta}^{t}\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^2}^2\mathrm{d}\tau\\ &+\frac{2C\gamma}{\nu_1}\int_{t-\delta}^{t}\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}^2\|u^{\varepsilon}(t-\delta)\|_{H^2}^2\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_3(t) \leq& 2C\nu_2\int_{t-\delta}^{t}(\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}+\mu\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}^2)\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^2}\mathrm{d}\tau\\ &+2C\nu_2\int_{t-\delta}^{t}(\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}+\mu\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}^2)\|u^{\varepsilon}(t-\delta)\|_{H^2}\mathrm{d}\tau\\ \leq& \frac{\nu_1}{2}\int_{t-\delta}^{t}\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^2}^2\mathrm{d}\tau+\int_{t-\delta}^{t}\|u^{\varepsilon}(t-\delta)\|_{H^2}^2\mathrm{d}\tau\\ &+\Big(\frac{2C\nu_2^2}{\nu_1}+C\nu_2^2\Big)\int_{t-\delta}^{t}\big(\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}+\mu\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}^2\big)^2\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

对于 $\mathrm{J}_4(t)$ 与 $\mathrm{J}_5(t)$, 利用 (4) 式 与假设 (H1) 知

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_4(t)+\mathrm{J}_5(t) &\leq 2\int_{t-\delta}^{t}\|f_{\varepsilon}(\tau,u^{\varepsilon}(\tau))\|_{H^1}\|u^{\varepsilon}(\tau)-u^{\varepsilon}(t-\delta)\|_{H^1}\mathrm{d}\tau+C\int_{t-\delta}^{t}\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}^2\mathrm{d}\tau\\ &\leq 2\int_{t-\delta}^{t}(L\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}+K)\|u^{\varepsilon}(\tau)-u^{\varepsilon}(t-\delta)\|_{H^1}\mathrm{d}\tau+C\int_{t-\delta}^{t}\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}^2\mathrm{d}\tau\\ &\leq C\int_{t-\delta}^{t}[\|u^{\varepsilon}(\tau)\|_{H^1}^2+\|u^{\varepsilon}(t-\delta)\|_{H^1}^2+1]\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

结合以上估计可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_k =&\mathbb{E}\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\|u^\varepsilon(t)-u^\varepsilon(t-\delta)\|_{H^1}^2\mathrm{d}t\\
&\leq 2\mathbb{E}\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\int_{t-\delta}^{t}\langle u^\varepsilon(\tau)-u^\varepsilon(t-\delta),u^\varepsilon(\tau)\wedge G\mathrm{d}W(\tau)\rangle_{H^1}\mathrm{d}t\\
&+C\mathbb{E}\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\int_{t-\delta}^{t}\Big[\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}^2+\|u^\varepsilon(t-\delta)\|_{H^2}^2+\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}^2\|u^\varepsilon(t-\delta)\|_{H^2}^2\\
&+\big(\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}+\mu\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}^2\big)^2+\|u^\varepsilon(t-\delta)\|_{H^1}^2+\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^2}^2\Big]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
=:&\,\mathrm{I}_k^1+\mathrm{I}_k^2.
\end{aligned}$$

首先, 利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式得

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_k^1&\leq C\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\mathbb{E}\Big(\int_{t-\delta}^{t}\|u^\varepsilon(\tau)\times G\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0,H^1)}^2\|u^\varepsilon(\tau)-u^\varepsilon(t-\delta)\|_{H^1}^2\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\
&\leq C\Big(\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\mathbb{E}\int_{t-\delta}^{t}[\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}^4+\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}^2\|u^\varepsilon(t-\delta)\|_{H^1}^2]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\delta^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\mathbb{E}\int_{t-\delta}^{t}[\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}^4+\|u^\varepsilon(t-\delta)\|_{H^1}^4]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\delta^{\frac{1}{2}}\Big(\mathbb{E}\int_{(k-1)\delta}^{(k+1)\delta}\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^4\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

其次, 容易验证

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_k^2\leq&C\mathbb{E}\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\delta\Big[(\sup_{0\leq\tau\leq T}\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}^2+1)\|u^\varepsilon(t-\delta)\|_{H^2}^2+\|u^\varepsilon(t-\delta)\|_{H^1}^2+1\Big]\mathrm{d}t\\
&+C\mathbb{E}\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\int_{t-\delta}^{t}\Big[\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}^2+\mu^2\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}^4+\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^2}^2\Big]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
\leq&C\delta\mathbb{E}\int_{(k-1)\delta}^{(k+1)\delta}\Big[(\sup_{0\leq\tau\leq T}\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}^2+1)\|u^\varepsilon(t)\|_{H^2}^2+\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^2+1\\
&+\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^2+\mu^2\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^4+\big(\sup_{0\leq t\leq T}\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}\big)\|u^\varepsilon(t)\|_{H^2}^2\Big]\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

结合命题 2.1 与上述估计, 可得

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{T(\delta)-1}\mathrm{I}_k \leq & C\delta\mathbb{E}\int_0^T\Big[\big(\sup_{0\leq\tau\leq T}\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}^2+1\big)\|u^\varepsilon(t)\|_{H^2}^2+\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^2+1\\
&+\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^2+\mu^2\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^4+\big(\sup_{0\leq t\leq T}\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}\big)\|u^\varepsilon(t)\|_{H^2}^2\Big]\mathrm{d}t\\
&+C\delta^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{T(\delta)-1}\Big(\mathbb{E}\int_{(k-1)\delta}^{(k+1)\delta}\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^4\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\\
\leq & C\delta\mathbb{E}\Big[\big(\sup_{0\leq\tau\leq T}\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}^2+1\big)\int_0^T\|u^\varepsilon(t)\|_{H^2}^2\mathrm{d}t\Big]\\
&+C\delta\mathbb{E}\int_0^T\big[\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^2+\mu^2\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^4+\big(\sup_{0\leq t\leq T}\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}\big)\|u^\varepsilon(t)\|_{H^2}^2\\
&+1\big]\mathrm{d}t+C\delta(T(\delta))^{\frac{1}{2}}\Big(\mathbb{E}\int_0^T\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^4\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\\
\leq & C\delta\Big[\mathbb{E}\big(\sup_{0\leq\tau\leq T}\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^1}^2+1\big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[\mathbb{E}\Big(\int_0^T\|u^\varepsilon(t)\|_{H^2}^2\mathrm{d}t\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\\
&+C(T,\|u_0^\varepsilon\|_{H^1})\delta+C(T,\|u_0^\varepsilon\|_{H^1})\delta^{\frac{1}{2}}\\
\leq & C(T,\|u_0^\varepsilon\|_{H^1})\delta^{\frac{1}{2}}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

类似地, 可以证明

$$2\sum_{k=1}^{T(\delta)-1}\mathrm{II}_k\leq C(T,\|u_0^\varepsilon\|_{H^1})\delta^{\frac{1}{2}}. \qquad (11)$$

结合 (9) 式 - (11) 式 知 (7) 式成立, 证毕.

定理 3.1 设 u^ε 与 $\bar{u}$ 分别为方程 (3) 与方程 (6) 的解. 如果 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|u_0^\varepsilon-\bar{u}_0\|_{H^1}=0$, 且假设 (H1) - (H2) 成立. 则对任意的 $T>0$, 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}\|u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t)\|_{H^1}^2\Big)=0.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t))=&\nu_1\Delta(u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t))\mathrm{d}t+(f_\varepsilon(t,u^\varepsilon(t))-\bar{f}(t,\bar{u}(t)))\mathrm{d}t\\
&+\gamma[u^\varepsilon(t)\times\Delta(u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t))-(u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t))\times\Delta\bar{u}(t)]\mathrm{d}t\\
&-\nu_2[(1+\mu(|u^\varepsilon(t)|^2)u^\varepsilon(t)-(1+\mu|\bar{u}(t)|^2)\bar{u}(t)]\mathrm{d}t\\
&+(u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t))\times G\mathrm{d}W(t).
\end{aligned}$$

由 Itô 公式可得

$$
\begin{aligned}
&\|u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t)\|_{H^1}^2\\
&=\|u_0^\varepsilon-\bar{u}_0\|_{H^1}^2+2\nu_1\int_0^t\langle\Delta(u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)),u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\rangle_{H^1}\mathrm{d}\sigma\\
&\quad+2\gamma\int_0^t\langle u^\varepsilon(\sigma)\times\Delta(u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)),u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\rangle_{H^1}\mathrm{d}\sigma\\
&\quad-2\gamma\int_0^t\langle(u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma))\times\Delta\bar{u}(\sigma),u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\rangle_{H^1}\mathrm{d}\sigma\\
&\quad-2\nu_2\int_0^t\langle(1+\mu|u^\varepsilon(\sigma)|^2)u^\varepsilon(\sigma)-(1+\mu|\bar{u}(\sigma)|^2)\bar{u}(\sigma),u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\rangle_{H^1}\mathrm{d}\sigma\\
&\quad+2\int_0^t\langle f_\varepsilon(\sigma,u^\varepsilon(\sigma))-\bar{f}(\sigma,\bar{u}(\sigma)),u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\rangle_{H^1}\mathrm{d}\sigma\\
&\quad+\int_0^t\|(u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma))\times G\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0;H^1)}^2\mathrm{d}\sigma\\
&\quad+2\int_0^t\langle u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma),(u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma))\times G\mathrm{d}W(\sigma)\rangle_{H^1}\\
&=:\|u_0^\varepsilon-\bar{u}_0\|_{H^1}^2+\sum_{i=7}^{13}\mathrm{J}_i(t).
\end{aligned}
$$

首先,

$$
\mathrm{J}_7(t)=-2\nu_1\int_0^t\|u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\|_{H^2}^2\mathrm{d}\sigma+2\nu_1\int_0^t\|u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\|_{H^1}^2\mathrm{d}\sigma.
$$

其次, 利用 Sobolev 不等式可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_8(t)&=-2\gamma\int_0^t\langle\nabla u^\varepsilon(\sigma)\times\nabla(u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)),u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\rangle_{L^2}\mathrm{d}\sigma\\
&\le 2\gamma\int_0^t\|u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\|_{H^1}^2\|u^\varepsilon(\sigma)\|_{H^1}\mathrm{d}\sigma,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_9(t)&\le 2\gamma\int_0^t\|u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\|_{H^1}\|\bar{u}(\sigma)\|_{H^2}\|u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\|_{H^2}\mathrm{d}\sigma\\
&\le\nu_1\int_0^t\|u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\|_{H^2}^2\mathrm{d}\sigma+\frac{\gamma}{\nu_1}\int_0^t\|u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\|_{H^1}^2\|\bar{u}(\sigma)\|_{H^2}^2\mathrm{d}\sigma,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{10}(t)&\le 2\nu_2\mu\Big|\int_0^t\langle|u^\varepsilon(\sigma)|^2u^\varepsilon(\sigma)-|\bar{u}(\sigma)|^2\bar{u}(\sigma),u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\rangle_{H^1}\mathrm{d}\sigma\Big|\\
&\le\nu_1\int_0^t\|u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\|_{H^2}^2\mathrm{d}\sigma+\frac{2\nu_2^2\mu^2}{\nu_1}\int_0^t\|u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\|_{H^1}^2\|u^\varepsilon(\sigma)\|_{H^1}^4\mathrm{d}\sigma\\
&\quad+\frac{2\nu_2^2\mu^2}{\nu_1}\int_0^t\|u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\|_{H^1}^2(\|u^\varepsilon(\sigma)\|_{H^1}^2+\|u^\varepsilon(\sigma)\|_{H^1}\|\bar{u}(\sigma)\|_{H^1})^2\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$

最后, 由 (4) 式得

$$\mathrm{J}_{12}(t) \leq C\int_0^t \|u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\|_{H^1}^2 \mathrm{d}\sigma.$$

因此

$$\|u^\varepsilon(t)-u(t)\|_{H^1}^2 \leq \|u_0^\varepsilon-\bar{u}_0\|_{H^1}^2+\int_0^t \Xi(\sigma)\|u^\varepsilon(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\|_{H^1}^2 \mathrm{d}\sigma+\mathrm{J}_{11}(t)+\mathrm{J}_{13}(t),$$

其中

$$\begin{aligned}\Xi(t)=&C\Big[1+\|u^\varepsilon(\sigma)\|_{H^1}+\|\bar{u}(\sigma)\|_{H^2}^2+\|u^\varepsilon(\sigma)\|_{H^1}^4\\&+(\|u^\varepsilon(\sigma)\|_{H^1}^2+\|u^\varepsilon(\sigma)\|_{H^1}\|\bar{u}(\sigma)\|_{H^1})^2\Big].\end{aligned}$$

对任意的 $R>0$, 定义停时,

$$\tau_R^\varepsilon=\inf\Big\{t>0:\ \|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}+\|\bar{u}(t)\|_{H^1}+\int_0^t\|u^\varepsilon(\sigma)\|_{H^2}^2\mathrm{d}\sigma+\int_0^t\|\bar{u}(\sigma)\|_{H^2}^2\mathrm{d}\sigma>R\Big\}.$$

由 Gronwall 不等式,

$$\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau_R^\varepsilon}\|u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t)\|_{H^1}^2\leq C(T,R)\Big[\|u_0^\varepsilon-\bar{u}_0\|_{H^1}^2+\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau_R^\varepsilon}\mathrm{J}_{11}(t)+\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau_R^\varepsilon}\mathrm{J}_{13}(t)\Big].$$

由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau_R^\varepsilon}\|u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t)\|_{H^1}^2\\\leq&\frac{1}{2}\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau_R^\varepsilon}\|u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t)\|_{H^1}^2+\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau_R^\varepsilon}\mathrm{J}_{11}(t)\\&+C(T,R)\Big[\mathbb{E}\|u_0^\varepsilon-\bar{u}_0\|_{H^1}^2+\int_0^T\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t\wedge\tau_R^\varepsilon}\|u^\varepsilon(s)-\bar{u}(s)\|_{H^1}^2\mathrm{d}t\Big].\end{aligned}\tag{12}$$

现在, 来估计 $\mathbb{E}\Big(\sup\limits_{0\leq t\leq T\wedge\tau_R^\varepsilon}\mathrm{J}_{11}(t)\Big)$, 注意到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau_R^\varepsilon}\mathrm{J}_{11}(t)\Big)\\\leq&2K\mathbb{E}\int_0^T\|u^\varepsilon(s)-\bar{u}(s)\|_{H^1}^2\mathrm{d}s+2\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t\langle f_\varepsilon(s,\bar{u}(s))-\bar{f}(\bar{u}(s)),u^\varepsilon(s)-\tilde{u}^\varepsilon(s)\rangle_{H^1}\mathrm{d}s\\&+2\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t\langle f_\varepsilon(s,\bar{u}(s))-\bar{f}(\bar{u}(s)),\tilde{u}^\varepsilon(s)-\tilde{\bar{u}}(s)\rangle_{H^1}\mathrm{d}s\\&+2\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t\langle f_\varepsilon(s,\bar{u}(s))-\bar{f}(\bar{u}(s)),\tilde{\bar{u}}(s)-\bar{u}(s)\rangle_{H^1}\mathrm{d}s\\=:&\,2K\mathbb{E}\int_0^T\|u^\varepsilon(s)-\bar{u}(s)\|_{H^1}^2\mathrm{d}s+\mathrm{J}_{11}^1+\mathrm{J}_{11}^2+\mathrm{J}_{11}^3.\end{aligned}$$

由命题 2.1, 引理 3.1 与假设 (H1) 知

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_{11}^1 &\le 2\mathbb{E}\int_0^T (\|f_\varepsilon(s,\bar u(s))\|_{H^1}+\|\bar f(\bar u(s))\|_{H^1})\|u^\varepsilon(s)-\tilde u^\varepsilon(s)\|_{H^1}\mathrm{d}s\\
&\le 4\Big[\mathbb{E}\int_0^T (K\|\bar u(s)\|_{H^1}+L)^2\mathrm{d}s\Big]^{\frac12}\Big[\mathbb{E}\int_0^T \|u^\varepsilon(s)-\tilde u^\varepsilon s)\|_{H^1}^2\mathrm{d}s\Big]^{\frac12}\\
&\le C(T,\|u_0^\varepsilon\|_{H^1})\delta^{\frac14}.
\end{aligned}$$

类似地,

$$\mathrm{J}_{11}^3 \le C(T,\|u_0^\varepsilon\|_{H^1})\delta^{\frac14}.$$

对于 J_{11}^2, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_{11}^2 \le& 4K\mathbb{E}\int_0^T \|\bar u(t)-\tilde{\bar u}(t)\|_{H^1}\|\tilde u^\varepsilon(t)-\tilde{\bar u}(t)\|_{H^1}\mathrm{d}t\\
&+2\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \langle f_\varepsilon(s,\tilde{\bar u}(s))-\bar f(\tilde{\bar u}(s)),\tilde u^\varepsilon(s)-\tilde{\bar u}(s)\rangle_{H^1}\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

由命题 2.1 与引理 3.1 得

$$\begin{aligned}
&4K\mathbb{E}\int_0^T \|\bar u(t)-\tilde{\bar u}(t)\|_{H^1}\|\tilde u^\varepsilon(t)-\tilde{\bar u}(t)\|_{H^1}\mathrm{d}t\\
\le& 4K\Big[\mathbb{E}\int_0^T \|\bar u(t)-\tilde{\bar u}(t)\|_{H^1}^2\mathrm{d}t\Big]^{\frac12}\Big[\mathbb{E}\int_0^T \|\tilde u^\varepsilon(t)-\tilde{\bar u}(t)\|_{H^1}^2\mathrm{d}t\Big]^{\frac12}\\
\le& C(K,T,\|\bar u_0\|_{H^1})\delta^{\frac14}.
\end{aligned}$$

令 $t(\delta):=\big[\frac{t}{\delta}\big]\delta$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \langle f_\varepsilon(s,\tilde{\bar u}(s))-\bar f(\tilde{\bar u}(s)),\tilde u^\varepsilon(s)-\tilde{\bar u}(s)\rangle_{H^1}\mathrm{d}s\\
\le& \mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\left\{\sum_{k=0}^{[\frac{t}{\delta}]-1}\Big\|\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} f_\varepsilon(s,\bar u(k\delta))-\bar f(\bar u(k\delta))\mathrm{d}s\Big\|_{H^1}\|u^\varepsilon(k\delta)-\bar u(k\delta)\|_{H^1}\right\}\\
&+C(T,\|u_0\|_{H^1})\delta\\
\le& \frac{C(T,\|u_0\|_{H^1})}{\delta}\sup_{0\le k\le T(\delta)-1}\delta\kappa\big(\delta/\varepsilon\big)\Big[\mathbb{E}(1+\|\bar u(k\delta)\|_{H^1}^2)\Big]^{\frac12}+C(T,\|u_0\|_{H^1})\delta\\
\le& C(T,\|\bar u_0\|_{H^1})\Big(\delta+\kappa\big(\delta/\varepsilon\big)\Big).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T\wedge\tau_R^\varepsilon}\mathrm{J}_{11}(t)\\
\le& 2K\int_0^T \mathbb{E}\sup_{0\le s\le t\wedge\tau_R^\varepsilon}\|u^\varepsilon(s)-\bar u(s)\|_{H^1}^2\mathrm{d}s+C(K,T,\|\bar u_0\|_{H^1})\Big(\delta^{\frac14}+\kappa(\delta/\varepsilon)\Big). \qquad (13)
\end{aligned}$$

结合 (12) 式 - (13) 式与 Gronwall 不等式得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T\wedge\tau_R^\varepsilon}\|u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t)\|_{H^1}^2\\
\le& C(K,T,R,\|\bar{u}_0\|_{H^1})\Big[\mathbb{E}\|u_0^\varepsilon-\bar{u}_0\|_{H^1}^2+\delta^{\frac{1}{4}}+\kappa(\delta/\varepsilon)\Big]. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

此外, 由 Chebyshev 不等式得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\|u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t)\|_{H^1}^2 1_{\{T>\tau_R^\varepsilon\}}\Big]\\
\le&\left[\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\|u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t)\|_{H^1}^4\Big)\right]^{\frac{1}{2}}\Big[\mathbb{P}(T>\tau_R^\varepsilon)\Big]^{\frac{1}{2}}\\
\le&\frac{C(T,\|\bar{u}_0\|_{H^1})}{\sqrt{R}}. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

因此 (14) 式 - (15) 式表明

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\|u^\varepsilon(t)-\bar{u}(t)\|_{H^1}^2\Big]\\
\le& C(K,T,R,\|\bar{u}_0\|_{H^1})\Big[\mathbb{E}\|u_0^\varepsilon-\bar{u}_0\|_{H^1}^2+\delta^{\frac{1}{4}}+\delta_f(\delta/\varepsilon)\Big]+\frac{C(T,\|\bar{u}_0\|_{H^1})}{\sqrt{R}}.
\end{aligned}
$$

取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 先令 $\varepsilon\to 0$, 再令 $R\to\infty$ 知结论成立. 证毕.

参考文献

[1] Gilbert T L. A lagrangian formulation of the gyromagnetic equation of the magnetization field [J]. Phys. Rev., 1955,100(1):1243.

[2] Garanin D A. Generalized equation of motion for a ferromagnet [J]. Phys. A, 1991,172(3):470-491.

[3] Garanin D A. Fokker-Planck and Landau-Lifshitz-Bloch equations for classical ferromagnets [J]. Phys. Rev. B, 1997,55(5):3050-3057.

[4] Le K N. Weak solutions of the Landau-Lifshitz-Bloch equation [J]. J. Differential Equations, 2016,261(12):6699-6717.

[5] Evans R F L, Hinzke D, Atxitia U, et al. Stochastic form of the Landau-Lifshitz-Bloch equation [J]. Physical Review B, 2012,85(1):144-153.

[6] Garanin D A, Chubykalo-Fesenko O. Thermal fluctuations and longitudinal relaxation of single-domain magnetic particles at elevated temperatures [J]. Phys. Rev. B, 2004,70(21):212-219.

[7] Jiang S, Ju Q, Wang H. Martingale weak solutions of the stochastic Landau-Lifshitz-Bloch equation [J]. J. Differential Equations, 2009,266(5):2542-2574.

[8] Brzeźniak Z, Goldys B, Le K N. Existence of a unique solution and invariant measures for the stochastic Landau-Lifshitz-Bloch equation [J]. J. Differential Equations, 2020,269(11):9471-9507.

[9] Qiu Z, Tang Y, Wang H. Asymptotic behavior for the 1D stochastic Landau-Lifshitz-Bloch equation [J]. J. Math. Phys., 2020,61(10):101-116.

[10] Khasminskii R Z. On the principle of averaging the Ito stochastic differential equations [J]. Kibernetika, 1968,4(3):260-279.

[11] Bao J, Yin G, Yuan C. Two-time-scale stochastic partial differential equations driven by α-stable noises: Averaging principles [J]. Bernoulli, 2017,23(1):645-669.

[12] Cerrai S, Freidlin M I. Averaging principle for a class of stochastic reaction diffusion equations [J]. Probab. Theory Relat. Fields, 2009,144(1):137-177.

[13] Gao P. Averaging principles for stochastic 2D Navier-Stokes equations [J]. Journal of Statistical Physics, 2022,186(2):1-29.

[14] Guo Z, Lv G, Wei J. Averaging principle for stochastic differential equations under a weak condition [J]. Chaos, 2020,30(12):123139.

[15] Hong W, Li S, Liu W. Strong convergence rates in averaging principle for slow-fast McKean-Vlasov SPDEs [J]. J. Differential Equations, 2022,316(1):94-135.

[16] Xu Y, Pei B, Wu J L. Stochastic averaging principle for differential equations with non-Lipschitz coefficients driven by fractional Brownian motion [J]. Stoch. Dyn., 2017,17(2):1750013.

[17] Liu W, Röckner M. Stochastic Partial Differential Equations: An Introduction [M]. New York: Springer, 2015.

Averaging principle for 1D stochastic Landau-Lifshitz-Bloch equation

Yin Xiuwei [1], Shen Guangjun [1], Wu Jiang-Lun [2]

(1. Department of Statistics, Anhui Normal University, Wuhu 241002, China;

2. Department of Mathematics, Swansea University, Bay Campus, Swansea SA1 8EN, UK)

Abstract: In this paper, we study the strong averaging principle for 1D stochastic Landau-Lifshitz-Bloch equation (SLLBE). The averaging principle is an effective method for studying the qualitative analysis of nonlinear dynamical systems. Under some assumptions, utilising Khasminkii′s time discretization approach, we show the solution of SLLBE can be approximated by the solutions to averaged stochastic systems in the sense of mean square.

Key words: stochastic Landau-Lifshitz-Bloch equation, averaging principle, strong convergence

2010 MSC: 60H15, 35Q35, 60H30